

AE-1243

B.Sc. (Part - II)
Term End Examination, 2016-17

MATHEMATICS

Paper - I

Advanced Calculus

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer **all** questions. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (a) अभिसरण के कौशी सिद्धांत का प्रयोग करके

दर्शाइए कि अनुक्रम $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, जहाँ

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \text{ अभिसारी नहीं है।}$$

(2)

By using Cauchy's principle of convergence,
show that the sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ is not
convergent, where $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

(b) दर्शाइए कि अनुक्रम $\langle a_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ जहाँ

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ अभिसारी है।}$$

Show that the sequence $\langle a_n \rangle_{n=1}^{\infty}$, where

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ is convergent.}$$

अथवा / OR

(a) श्रेणी $\sum u_n$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए

$$\text{जिसका व्यापक पद } u_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) \text{ है।}$$

Test for convergence of series $\sum u_n$ whose

$$\text{general term is } u_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right).$$

(3)

(b) निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण या अपसरण का परीक्षण कीजिए :

$$\frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} + \frac{x^4}{4.5} + \dots, x > 0$$

Test the convergence or divergence of the following series :

$$\frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} + \frac{x^4}{4.5} + \dots, x > 0$$

इकाई / Unit-II

2. (a) रोले प्रमेय का सत्यापन फलन $f(x) = x^3 - 12x$ के लिए अंतराल $0 \leq x \leq 2\sqrt{3}$ में कीजिए।

Verify Rolle's theorem for the function $f(x) = x^3 - 12x$ in the interval $0 \leq x \leq 2\sqrt{3}$.

$$(b) \text{ यदि } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{1/x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \text{ दर्शाइए कि}$$

फलन $x = 0$ पर सतत् है किन्तु $f'(0)$ विद्यमान नहीं है।

(4)

Show that the function

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{1/x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \text{ is continuous at}$$

$x = 0$ but $f'(0)$ does not exist.

अथवा / OR

- (a) फलन $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ के लिए अंतराल $[2, 4]$ में लग्रांज के मध्यमान प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

Verify Lagrange's mean value theorem for the function $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ in the interval $[2, 4]$.

- (b) परिबद्धता प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Boundedness Theorem.

इकाई / Unit-III

3. (a) दो चरों के लिए समघात फलनों पर आयलर प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove the Euler's theorem for homogeneous functions of two variables.

(5)

- (b) फलन $f(x, y) = x^2 + xy - y^2$ का $(x - 1)$ और $(y + 2)$ के घातों में टेलर प्रमेय का प्रसार कीजिए।

Expand the function $f(x, y) = x^2 + xy - y^2$ by Taylor's theorem in powers of $(x - 1)$ and $(y + 2)$.

अथवा / OR

- (a) समीकरण $(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + x^2 y = 0$ को रूपान्तरित कीजिए, जबकि $x = \cos \theta$

Transform the equation $(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + x^2 y = 0$, when $x = \cos \theta$.

- (b) यदि $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, तो सिद्ध कीजिए कि $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u = \frac{-9}{(x + y + z)^2}$

If $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, then prove

that $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u = \frac{-9}{(x + y + z)^2}$.

(6)

इकाई / Unit-IV

4. (a) फलन $u = xy + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$ के उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ मानों को ज्ञात कीजिए।

Discuss the maximum or minimum values of

the function $u = xy + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$.

- (b) सरल रेखाओं के कुल $ax \sec \alpha - by \operatorname{cosec} \alpha = a^2 - b^2$ का एन्विलोप ज्ञात कीजिए, जहाँ कोण α प्राचल है।

Find the envelope of the family of straight lines $ax \sec \alpha - by \operatorname{cosec} \alpha = a^2 - b^2$, where angle α is the parameter.

अथवा / OR

- (a) फलन $u = x^2 + y^2 + z^2$ का निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $ax + by + cz = p$ दिया गया है।

Find the minimum value of the function $u = x^2 + y^2 + z^2$, where $ax + by + cz = p$ is given.

- (b) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का केन्द्रज ज्ञात कीजिए।

(7)

Find the evolute of the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

इकाई / Unit-V

5. (a) सिद्ध कीजिए कि $B(m, n) = \frac{\Gamma m \Gamma n}{\Gamma m + n}$
($m, n > 0$)।

Prove that $B(m, n) = \frac{\Gamma m \Gamma n}{\Gamma m + n}$ ($m, n > 0$).

- (b) ध्रुवीय निर्देशांकों में परिवर्तित करके

$$I = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} y^2 \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \text{ समाकलन}$$

का रूपान्तरण कीजिए और इसका मान ज्ञात कीजिए।

Transform the integral

$$I = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} y^2 \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \text{ by changing}$$

to polar co-ordinates and hence evaluate it.

अथवा / OR

(8)

(a) मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{dx dy}{1+x^2+y^2}$$

Evaluate :

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{dx dy}{1+x^2+y^2}$$

(b) दिखाइए कि

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^2} = \frac{3}{4} - \log 2$$

Show that

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^2} = \frac{3}{4} - \log 2$$