

UG-000741

(N012) B.Sc. (Maths Group)

(SECOND SEMESTER)

Examination, June-2025

Compulsory/Optional

(04) Mathematics

Time : Three Hours]

[Maximum Marks : 70

नोट : दोनों खण्डों से निर्देशानुसार उत्तर दीजिए। प्रश्नों के अंक उनके दाहिनी ओर अंकित हैं।

Note : Answer from both the sections as directed. The figures in the right-hand margin indicate marks.

खण्ड-अ/Section-A

1. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दें। $1 \times 10 = 10$

Answer the following questions.

(Turn Over)

(2)

(i) एक वास्तविक विषम-सममित आव्यूह के विकर्ण अव्यव क्या होता है?

What is the diagonal elements of a real Skew-symmetric matrix?

(ii) यदि A कोटि n का एक वर्ग आव्यूह है जिसकी जाति r है तो आव्यूह A की शून्यता क्या होगी बताइये?

If A is a square matrix of order n, whose rank is r, then what is the nulity of the matrix A?

(iii) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ का आइगेन मान बताइये।

What are the eigenvalues of the matrix $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$

(iv) यदि A और B कोई भी समुच्चय है तो A-B का मान क्या होगा?

If A and B are any sets, then what is the value of A-B?

(v) यदि $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ तथा $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ हैं, जहाँ $f(x) = x^3$ तथा $g(x) = x^4$ तो $(g \circ f)(4)$ का मान क्या होगा?

If $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ where $f(x) = x^3$ and $g(x) = x^4$ then what is the value of $(g \circ f)(4)$?

UG-000741

(Continued)

(3)

(vi) समीकरण $2x^7 - x^4 + 4x^3 - 5 = 0$ में कम से कम कितने अधिकल्पित मूल होंगे?

How many minimum imaginary roots are there in equation $2x^7 - x^4 + 4x^3 - 5 = 0$

(vii) वो शर्त लिखें जिसके लिये घन समीकरण $Z^3 + 3Hz + G = 0$ के सभी मूल वास्तविक होते हैं।

Write the condition for which all the roots of the cubic equation $Z^3 + 3Hz + G = 0$ are real.

(viii) समूह $\{(1, -1, i, -i)_i\}$ में i की कोटि क्या है बताइए।

Write the order of i in the group $\{(1, -1, i, -i)_i\}$.

(ix) यदि G एक अन्-आबेली समूह है और $a, b \in G$ है, तो $(ab)^{-1}$ का मान क्या होगा?

If G is a non-abelian group and $a, b \in G$, then what is the value of $(ab)^{-1}$.

(x) एक ऐसे बीजीय संरचना का उदाहरण दीजिये जो अर्ध-समूह नहीं है।

Give one example of algebraic structure, which is not a semi-group.

(Turn Over)

UG-000741

(4)

2. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दें। (लघु उत्तरीय)

Answer the following questions (Short Answer type) $4 \times 5 = 20$

(a) प्रारम्भिक रूपान्तरण की सहायता से आव्यूह A का व्युत्क्रम साल कीजिए, जहाँ -

With the help of elementary transformation find the inverse of A where

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) मान लीजिये A और B एक समुच्चय के उपसमुच्चय हैं तब सिद्ध कीजिये की

Let A and B be subsets of a set U . Then prove that - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(c) समीकरण $2x^3 + 6x^2 + 5x + k = 0$ में k का मान ज्ञात कीजिए जबकि मूल समानान्तरण श्रेणी में हैं। Find the value of k in the equation $2x^3 + 6x^2 + 5x + k = 0$ given that roots are in A.P.

(d) सिद्ध कीजिये कि इकाई के चार चतुर्थ मूलों का समुच्चय $\{1, -1, i, -i\}$ गुणन संक्रिया के अंतर्गत एक परिमित आबेली समूह है।

Show that the set of fourth roots of unity $\{1, -1, i, -i\}$ forms an abelian group with respect to multiplication.

UG-000741

(Continued)

(5)

(e) सिद्ध कीजिये कि किसी समूह G के दो उपसमूहों का सर्वनिष्ठ G का एक उप समूह होता है।

Prove that intersection of two subgroups of a group G is a Subgroup of G .

खण्ड-ब/Section-B

नोट : प्रत्येक इकाई से कोई एक प्रश्न हल करें।

Note : Attempt any **one** question from each unit. $10 \times 4 = 40$

इकाई-I/Unit-I

3. निम्न आव्यूह की जाति ज्ञात कीजिए।

Find the rank of the following matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{bmatrix}$$

4. दर्शाइये कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ अपने अभिलाक्षणिक समीकरण को संतुष्ट करता है। अतः

A^{-1} ज्ञात कीजिये।

(Turn Over)

UG-000741

(6)

Show that the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ satisfies its own characteristic equation.

Hence find A^{-1}

इकाई-II/Unit-II

5. यदि I शून्य रहित पूर्णाकों का समुच्चय हो और सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है कि xRy यदि $x^y = y^x$ जबकि $x, y \in I$ तो क्या सम्बन्ध R एक तुल्यता सम्बन्ध है?

If I is the set of non zero integers and a relation R is defined by xRy if $x^y = y^x$ where $x, y \in I$ then prove that R is an equivalence relation.

6. यदि $f: X \rightarrow Y$ तथा A और B समुच्चय Y के दो उपसमुच्चय हैं, तो सिद्धि कीजिये कि :

If $f: X \rightarrow Y$ and A, B , are two subsets of Y , the prove that :

(i) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

(ii) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

UG-000741

(Continued)

(7)

इकाई-III/Unit-III

7. निम्न समीकरण को हल कीजिये।

Solve the equation :

$$6x^6 - 25x^5 + 31x^4 - 31x^2 + 25x - 6 = 0$$

8. कार्डन विधि से त्रिघात को हल कीजिए :

Solve the cubic by cardon's method.

$$x^3 - 18x - 35 = 0$$

इकाई-IV/Unit-IV

9. किसी परिमित समूह के लिये लैग्रांज के प्रमेय को लिखिये और सिद्ध कीजिये।

State and prove Lagrange's theorem for any finite group.

10. दर्शाइये कि दो उपसमूहों का संघ एक उपसमूह होता है यदि और केवल यदि एक दूसरे में अन्तर्विष्ट हैं।

Show that union of two subgroups is a subgroup if and only if one is contained in the other.