UF-10366

B.A./B.Sc. (Part-III)

Term End Examination, 2023-24

MATHEMATICS

Paper - II

(Abstract Algebra)

Time : Three Hours] *[Maximum Marks : 50*

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं **दो** भागो के उत्तर दीजिए। **सभी** प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any **two** parts from each question. **All** questions carry equal marks.

इकाई-I / Unit-I

1. (a) मान लो G एक समूह है तथा g, G का एक स्थिर अवयव है तब सिद्ध कीजिये कि प्रतिचित्रण $T_g: G \to G$ $T_g(x) = gxg^{-1}$ $\forall$ $x \in G$ से परिभाषित है G में एक स्वाकारिता है।

Let G be a group and let g be a fixed element of G. Then show that mapping $T_g: G \to G$ defined by $T_g(x) = gxg^{-1}$ $\forall$ $x \in G$ is an automorphism.

(b) माना कि G एक समूह है f, G का एक स्वाकारिता है। N, G का एक प्रसामान्य उपसमूह है सिद्ध कीजिये कि f(N), G का एक प्रसामान्य उपसमूह है।

Let G be a group, f an automorphism of G, N a normal subgroup of G. Then prove that f(N) is a normal subgroup of G.

(c) परिमित समूह के लिये कॉशी के प्रमेय को लिखिये एवम् सिद्ध कीजिये।

State and prove Cauchy's theorem for finite group.

इकाई-II / Unit-II

2. (a) सिद्ध कीजिये कि, किसी वलय R की दो गुणजावलियों S और T के लिये $S \cup T$, R की एक गुणजावली होता है। यदि और केवल यदि या तो $S \subseteq T$ या $T \subseteq S$

If S and T are ideals of a ring R then prove that $S \cup T$, is also on ideal of R iff either $S \subseteq T$ or $T \subseteq S$.

(b) परिमेय संख्याओं के क्षेत्र Q पर परिभाषित बहुपदों $f(x)=2x^3-4x^2+x-2$ तथा $g(x)=x^2-x-2$ का समापवर्तक ज्ञात कीजिये तथा इसे दो एकघाती बहुपदों के संचय के रूप में व्यक्त कीजिये।

Find the g.c.d. of the polynomials $f(x)=2x^3-4x^2+x-2$ and $g(x)=x^2-x-2$ and express it as a linear combination of two polynomials.

(c) सिद्ध कीजिये कि दो उपमाड्यूलों सर्वनिष्ठ भी एक उपमाड्यूल होता है?

Prove that the intersection of two submodules is also a submodule.

इकाई-III / Unit-III

3. (a) मान लो V(F) एक सदिश समष्टि है तब सिद्ध कीजिये कि-

(i) यदि $a, b \in F$ तथा α, V का एक शून्येत्तर अवयव हो तो $a\alpha = b\alpha \Rightarrow a = b$

(ii) यदि $\alpha, \beta \in V$ तथा a, F का शून्येत्तर अवयव हो तो $a\alpha = a\beta \Rightarrow \alpha = \beta$

Let V(F) be a vector space, then prove that:

(i) If α is non zero element of V and $a, b \in F$ then $a\alpha = b\alpha \Rightarrow a = b$

(ii) If a is a non zero element of F and $\alpha, \beta \in V$, then $a\alpha = a\beta \Rightarrow \alpha = \beta$

(b) सिद्ध कीजिये कि किसी सदिश समष्टि V(F) के एक अरिक्त उपसमुच्चय W को V का उपसमष्टि होने के लिये आवश्यक एवम् पर्याप्त प्रतिबंध $a, b \in F, \alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$ है।

Prove that, the necessary and sufficient condition for a non empty subset W of V(F) to be a sub space of V is $a, b \in F, \alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$

(c) सिद्ध कीजिये कि दो उपसमष्टियों का सर्वनिष्ठ भी एक उपसमष्टि होता है।

Prove that intersection of the subspace of a vector space is also a subspace.

इकाई-IV / Unit-IV

4. (a) यदि $f:V_3(R) \rightarrow V_2(R)$ निम्न प्रकार से परिभाषित है $f(x, y, z)=(y, z)$ तो दिखाइये कि एक रैखिक प्रतिचित्रण है।

If $f:V_3(R) \rightarrow V_2(R)$ is defined by $f(x, y, z)=(y, z)$ then show that f is a linear transformation.

(b) माना कि क्षेत्र F पर U तथा V दो सदिश समष्टियाँ है, तथा मान लो $T:U \rightarrow V$ एक रैखिक रूपांतरण है। U परिमित विमीय है तब सिद्ध कीजिये कि जाति (T)+ शून्यता (T) = विमा V

Let U and V be the vector spaces over the field F and let T be a linear transformation from U into V. Suppose U(F) is finite dimensional Then prove that rank (T) + nullity (T)= dim U.

(c) निम्न आव्यूह के सभी आइगेन मान एवम् आइगेन सदिशों को ज्ञात कीजिये।

Find all the eigen values and eigen vectors of the matrix A

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

इकाई-V / Unit-V

5. (a) यदि $V_2(R)$ में कोई दो सदिश $\alpha=(a_1, a_2)$ एवम् $\beta = (b_1, b_2)$ हैं, $V_2(R)$ आंतरिक गुणन निम्न प्रकार से परिभाषित है $(\alpha, \beta) = 3a_1b_1 + 2a_2b_2$ सिद्ध कीजिए कि $V_2(R)$ एक आंतरिक गुणन है।

Prove that $V_2(R)$ is an inner product space with an inner product defined on $\alpha=(a_1, a_2)$ $\beta = (b_1, b_2) \in V_2(R)$ by $(\alpha, \beta) = 3a_1b_1 + 2a_2b_2$.

(b) किसी आन्तर गुणन समष्टि V(F) में किन्हीं भी दो सदिशों α, β के लिये सिद्ध कीजिये कि

$$|\alpha, \beta| \leq ||\alpha||\,||\beta||$$

In an inner product space V(F) for any two vectors α, β prove that

$$|\alpha, \beta| \leq ||\alpha||\,||\beta||$$

(c) $V_4(R)$ के एक घाततः स्वतंत्र सदिशों के समुच्चय $B=\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ का प्रसामान्य लाम्बिक समुच्चय ज्ञात कीजिये जहाँ $\beta_1=(1, 0, 1, 1)$, $\beta_2=(-1, 0, -1, 1)$, $\beta_3=(0, -1, 1, 1)$

Orthonormalize the set of linearly independent vectors $B=\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ of $V_4(R)$, where $\beta_1=(1, 0, 1, 1)$, $\beta_2=(-1, 0, -1, 1)$, $\beta_3=(0, -1, 1, 1)$.