AK-1210

B.A./B.Sc. (Part-III)
Term End Examination, 2022-23

MATHEMATICS

Paper - II

Abstract Algebra

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं दो भागों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any two parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (*a*) किसी समूह G का केन्द्र $Z(G)$ सदैव G का एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।

Show that the centre $Z(G)$ of a group G is always a normal subgroup of G.

https://www.abvvonline.com

(*b*) यदि G कोटि p^n का एक समूह है जहाँ p एक अभाज्य संख्या है तथा n एक धन पूर्णांक, तब दर्शाइए कि समूह G अवश्य ही एक आतुच्छ केन्द्र रखता है।

अर्थात $Z(G) \neq (e)$

If G is a group of order p^n, where p is a prime number and n is a positive integer, then show that G has a non trivial centre is $Z(G) \neq (e)$.

(*c*) मानलो G एक समूह है तथा T, G का एक स्वाकारिता है। यदि $a \in G$ के लिए $N(a) = \{x \in G : xa = ax\}$। सिद्ध कीजिए कि $N(T(a)) = T(N(a))$

Let G be a group and T an automorphism of G. If for $a \in G$, $N(a) = \{x \in G : xa = ax\}$. Prove that $N(T(a)) = T(N(a))$

इकाई / Unit-II

2. (*a*) सिद्ध कीजिए कि, किसी वलय $(R, +, \cdot)$ की दो (वाम) गुणजावलियों का सर्वनिष्ठ भी एक (वाम) R का गुणजावली होता है?

Prove that, the intersection of two (left) ideals of any ring $(R, +, \cdot)$ is a (left) an ideal of R.

https://www.abvvonline.com

(*b*) परिमेय संख्याओं के क्षेत्र Q पर निम्नलिखित बहुपदों $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$ और $g(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 3$ का महत्तम समापवर्तक (g.c.d.) ज्ञात कीजिए और इसे दो बहुपदों के एक घात संचय के रूप में व्यक्त कीजिए।

Find the g.c.d. of the following polynomials $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$ and $g(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 3$ and express it as a linear combination of two polynomials.

(*c*) मानलो $f: M \to N$ एक R-मॉड्यूल M अंतर्क्षेपी एक R-मॉड्यूल N की एक R-समकारिता है। तब सिद्ध कीजिए कि ker$f$, M का एक R-उपमॉड्यूल होता है।

Let $f: M \to N$ be an R-homomorphism of R-module M into an R-module N. Then prove that the ker$f$ is an R-submodule of M.

इकाई / Unit-III

3. (*a*) किसी सदिश समष्टि $V(F)$ के अरिक्त उपसमुच्चय W के लिए V का एक उपसमष्टि होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध है : (सिद्ध कीजिए)

(*i*) $\alpha \in W, \beta \in W \Rightarrow \alpha - \beta \in W$

(*ii*) $a \in W, \alpha \in W \Rightarrow a\alpha \in W$

https://www.abvvonline.com

Prove that, the necessary and sufficient conditions for a non empty subset W of a vector space $V(F)$ to be a subspace of V are :

(*i*) $\alpha \in W, \beta \in W \Rightarrow \alpha - \beta \in W$

(*ii*) $a \in W, \alpha \in W \Rightarrow a\alpha \in W$

(*b*) सिद्ध कीजिए कि, दो उपसमष्टियों का संघ एक उपसमष्टि होता है यदि और केवल यदि एक दूसरे में अर्न्तविष्ट होते हैं।

Prove that, the union of two subspaces is a subspace if and only if one is contained in the other.

(*c*) यदि W एक परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ का एक उपसमष्टि है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\dim \frac{V}{W} = \dim V - \dim W$$

If W is subspace of a finite dimensional vector space $V(F)$, then prove that

$$\dim \frac{V}{W} = \dim V - \dim W$$

https://www.abvvonline.com

इकाई / Unit-IV

4. (*a*) सिद्ध कीजिए कि, प्रतिचित्रण $f: V_2(R) \to V_3(R)$ जो परिभाषित है $f(\alpha) = (a, a+b, a-b)$ जहाँ $\alpha = (a, b) \in V_2(R)$, एक रैखिक रूपान्तरण है।

Let $f: V_2(R) \to V_3(R)$ defined by $f(\alpha) = (a, a+b, a-b)$ where $\alpha = (a, b) \in V_2(R)$. Prove that f is linear transformation.

(*b*) सदिश समिष्ट समाकारिता के मूलभूत प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Fundamental theorem of vector space homomorphism.

(*c*) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ के आइगेन मानों को ज्ञात कीजिए तथा इससे सम्बन्धित आइगेन सदिश ज्ञात कीजिए।

https://www.abvvonline.com

If $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, then find the Eigen values and corresponding Eigen values of the matrix A.

इकाई / Unit-V

5. (*a*) यदि $V(F), x$ में बहुपदों का एक सदिश समष्टि है, जिसमें आन्तर गुणनफल निम्न रूप में परिभाषित है

$$(p, q) = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$$

जहाँ $p = p(x)$ and $q = q(x) \in V$

तब $p(x) = x + 2$, $q(x) = x^2 - 2x - 3$ के लिए ज्ञात कीजिए :

(*i*) (p, q)

(*ii*) $\| p \|$

(*iii*) $\| q \|$

(*iv*) p और q के बीच का कोण

https://www.abvvonline.com

If $V(F)$ be a vector space of all polynomials in x in which an inner product is defined by

$$(p, q) = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$$

where $p = p(x)$ and $q = q(x) \in V$

then for $p(x) = x + 2$, $q(x) = x^2 - 2x - 3$ find

(*i*) (p, q)

(*ii*) $\| p \|$

(*iii*) $\| q \|$

(*iv*) Angle between p and q

(*b*) यदि α, β किसी आन्तर गुणन समष्टि $V(F)$ के सदिश हैं तथा $a, b \in F$, तब सिद्ध कीजिए कि

$$(\alpha, \beta) = \text{Re}(\alpha, \beta) + i\, \text{Re}(\alpha, i\beta)$$

If α, β are vectors of an inner product space $V(F)$ and $a, b \in F$, then prove that

$$(\alpha, \beta) = \text{Re}(\alpha, \beta) + i\, \text{Re}(\alpha, i\beta)$$

(*c*) ग्राम-श्मिट के लाम्बिक प्रक्रम का उपयोग करके $V_3(R)$ के आधार पर $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ से एक प्रसामान्य लाम्बिक आधार प्राप्त कीजिए, जहाँ

$\beta_1 = (1, 0, 1)$, $\beta_2 = (1, 2, -2)$, $\beta_3 = (2, -1, 1)$

https://www.abvvonline.com

Apply the Gram-Schmidt orthogonlization process to obtain an orthonormal basis from the basis $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ of $V_3(R)$, where

$\beta_1 = (1, 0, 1)$, $\beta_2 = (1, 2, -2)$, $\beta_3 = (2, -1, 1)$

https://www.abvvonline.com