



AI-1209

B. A. / B. Sc. (Part-III)

Term End Examination, 2020-21

MATHEMATICS

Paper : First

Time Allowed : Three hours

Maximum Marks : 50

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं। प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं दो भागों को हल करें।

Note : Answer all questions. All questions carry equal marks. Attempt any **two** parts from each question.

इकाई-I

Unit-I

1. (a) फलन $f(x) = x \cos x$ के लिए अंतराल $(-\pi, \pi)$ में फूरियर श्रेणी प्राप्त कीजिए।

Obtain Fourier series in the interval $(-\pi, \pi)$

for the function $f(x) = x \cos x$.

- (b) दर्शाइए कि फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

मूल बिन्दु पर अवकलनीय नहीं है यद्यपि $(0, 0)$ पर आंशिक अवकलजों $\partial f / \partial x$ और $\partial f / \partial y$ का अस्तित्व है।

Show that the function

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

is not differentiable at origin although partial derivatives $\partial f / \partial x$ and $\partial f / \partial y$ exist at $(0, 0)$.

- (c) दर्शाइए कि श्रेणी

$$2 - \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{4}{3\sqrt{3}} - \frac{5}{4\sqrt{4}} + \dots$$

अभिसारी है।

Show that the series

$$2 - \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{4}{3\sqrt{3}} - \frac{5}{4\sqrt{4}} + \dots$$

is convergent.

इकाई-II

Unit-II

2. (a) रीमान समाकल के लिए डारबू प्रमेय सिद्ध कीजिए।

Prove Darboux theorem for Riemann integral.

- (b) विषम समाकल के प्रकार समझाइए। निम्न समाकल के अभिसरण का परीक्षण कीजिए—

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

Explain the kinds of improper integral. Test the convergence of the integral :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

- (c) प्राचल के सापेक्ष अवकलन की सहायता से दर्शाइए कि

$$\int_0^{\pi} \frac{\log(1 + \alpha \cos x)}{\cos x} dx = \pi \sin^{-1} \alpha ;$$

यदि $|\alpha| < 1$ ।

With the help of differentiation with respect to parameters show that

$$\int_0^{\pi} \frac{\log(1 + \alpha \cos x)}{\cos x} dx = \pi \sin^{-1} \alpha ;$$

for $|\alpha| < 1$.

इकाई-III

Unit-III

3. (a) यदि z_1, z_2, z_3 एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं, शीर्ष z_2 पर समकोण है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$z_1^2 + 2z_2^2 + z_3^2 = 2z_2(z_1 + z_3)$$

If z_1, z_2, z_3 are the vertices of an isosceles triangle, right angled at the vertex z_2 , then prove that $z_1^2 + 2z_2^2 + z_3^2 = 2z_2(z_1 + z_3)$.

(b) यदि $u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$ तथा

$f(z) = u + iv$, $z = x + iy$ का एक विश्लेषिक फलन है, तब मिलन थाम्सन विधि से $f(z)$ को z के पदों में ज्ञात कीजिए।

If $u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$ and

$f(z) = u + iv$, is an analytic function of $z = x + iy$, then find $f(z)$ in terms of z by Milne-Thomson method.

(c) मोबियस रूपान्तरण एवं वज्रानुपात को परिभाषित कीजिए एवं उस मोबियस रूपान्तरण को ज्ञात कीजिए जो $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ और $z_3 = \infty$ को क्रमशः $w_1 = 1$, $w_2 = i$ और $w_3 = -1$ में प्रतिचित्रित करता है।

Define Mobius transformation and cross-ratio. Find the Mobius transformation which maps $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ and $z_3 = \infty$ into $w_1 = 1$, $w_2 = i$ and $w_3 = -1$, respectively.

इकाई-IV

Unit-IV

4. (a) सीमा बिन्दु परिभाषित कीजिए और सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि X का एक उपसमुच्चय A संवृत होता है यदि और केवल यदि X सभी सीमा बिन्दुओं को अन्तर्विष्ट करता है अर्थात् $F \supseteq F'$ ।

Define limit points and prove that in a metric space X , a subset A of X is closed if and only if it contains all its limit points.
 $F \supseteq F'$.

(b) R में आर्किमिडीज गुणधर्म को सिद्ध कीजिए।

Prove that Archimedean property in R .

(c) मानलो d एक अरिक्त समुच्चय X पर एक दूरीक है। दर्शाइए कि अग्र रूप से परिभाषित फलन

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

जहाँ $x, y \in X$, भी X पर एक दूरीक है।

Let (X, d) be a metric space. A mapping d^* is defined such that

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \forall x, y \in X$$

then show that d^* is a metrix on X .

इकाई-V

Unit-V

5. (a) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक द्वितीय गणनीय दूरीक समष्टि गणनीय सघन होता है।

Prove that every second countable metric space is separable.

- (b) सिद्ध कीजिए कि किसी संहत दूरीक समष्टि का एक संवृत उपसमुच्चय संहत होता है।

Prove that a closed subset of a compact metric space is compact.

- (c) माना कि (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा $A \subseteq X$, यदि A संबद्ध विवृत और संवृत है, तब सिद्ध कीजिए कि A, X का संबद्ध घटक है।

Let (X, d) be a metric space and $A \subseteq X$.

If A is connected, open and closed, then prove that A is a component of X .