AH-1209 CV-19
B.A./B.Sc. (Part-III)
Term End Examination, 2019-20
MATHEMATICS

Paper-I

Time: Three Hours **[Maximum Marks: 50]**

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान है।

Note : Answer all questions. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-1

1. (a) दर्शाइए कि दो श्रेणियों में से कम से कम एक श्रेणी निरपेक्षता अभिसरण करती हो, तो दोनों श्रेणियों का गुणनफल अभिसरण करता है और दायी ओर दिये हुए मान की ओर अभिसरण करता है।

Show that the product of two convergent series converges and to the right value, if at least one of the two series converges absolutely.

(b) दर्शाइए कि फलन $f(x,y) = \sum_0 \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}(x,y) \quad \neq (0,0) \;\; 0\,,(x,y) = (0,0)$ स्वार्ज प्रमेय की शर्तो के संतुष्ट नहीं करता तथा $F_{xy}(0,0) \neq F_{yx}(0,0)$

Show that the function $f(x,y) = \sum_0 \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}(x,y) \quad \neq (0,0) \;\; 0\,,(x,y) = (0,0)$

Does not satisfy the condition of schwarg's theoram and $F_{xy}(0,0) \neq F_{yx}(0,0)$.

अथवा / OR

(a) फलन $f(x) = x\cos x$, $-\pi < x < \pi$ के लिए फूरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

Find fourier's series of the function $f(x) = x\cos x$, $-\pi < x < \pi$

(b) अन्तराल (-1,1) में आवर्ती फलन f (x) के लिए फूरियर श्रेणी प्राप्त कीजिए जहाँ $f(x)=x-x^2$

Find the fourier series for the periodic function f (x) at interval (-1,1), Where f(x)=x-x

इकाई / Unit-2

2. (a) यदि f: [a,b]->R में परिबद्ध फलन है, तो सिद्ध कीजिए कि [a,b]के किसी विभाजन p के लिए L(P,f) तथा U(P,f) भी परबिद्ध होगा।

If f: [a,b] -> R is bounded then prove that for any Partition p of [a,b], L(P,f) and U(P,f) are bounded.

(b) सिद्ध कीजिए प्रत्येक संतत फलन की मान समाकलनीय होता है।

Prove that every continuous function is Riemann intergrable.

अथवा / OR

(a) सिद्ध कीजिए कि समाकल $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)(b-x)^{1/2}}$ अपसारी है।

prove that the integral $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)(b-x)}y^2$ **diverges.**

यदि | α |<|,तो सिद्ध कीजिए

$$\int_0^{\pi} \frac{\log(1+\alpha\cos x)}{\cos x}\, dx = \pi \sin^{-1}\alpha$$

Of | α |<|, then prove that

$$\int_0^{\pi} \frac{\log(1+\alpha\cos x)}{\cos x}\, dx = \pi \sin^{-1}\alpha$$

इकाई /UNIT - III

3. (a) सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज, जिनके शीर्ष Z_1,Z_2,Z_3 है का केन्द्रक 1 / 3 $(Z_1+Z_2+Z_3)$ है।

Prove that the centroid of the triangle whose vertices are Z_1, Z_2 and Z_3 is $1/3\ (Z_1+Z_2+Z_3)$.

(b) सिद्ध कीजिए कि फलन $u=x^3-3xy^2+3x^2y-3y^2+1$ लापाप्लास समीकरण के संतुष्ट करता है संगत विश्लेषिक फलन u+v भी ज्ञात कीजिए।

Prove that the function $u=x^3-3xy^2+3x^2y-3y^2+1$ Satisfies Laplace's equation and detremine corresponding analytic function u+v.

अथवा/OR

(a) सिद्ध कीजिए प्रत्येक मोबियस रूपान्तरण वृत्त तथा सरल रेखा के वृत्त तथा सरल रेखा में प्रतिचित्रित करता है।

Prove that every Mobius transformation maps circles or straight lines into circles or Stanght lines.

(b) सिद्ध कीजिए द्विरेखीय स्पान्तरण के सापेक्ष तिर्यक अनदपाल अपरिवर्तत होता है।

Prove that Cross-ratios are invariant under a bilinear transformation.

इकाई /UNIT - IV

4. **(a)** सिद्ध कीजिए प्रत्येक विवृत्त गोलक एक विविक्त समुच्चय होता है।

Prove that each Open sphare is an open set.

(b) सिद्ध कीजिए मानलो (x,d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है तथा (y,x) दूरीक समष्टि (x,d) का एक उप समष्टि है तब y पूर्ण होगा यदि और केवल यदि y संवृत्त समुच्चय होता है।

Prove that Let (x,d) be a mebric space and (y,d) be a Subspace of (x,d) then y is Complete if any only if y is a Closed set.

अथवा/OR

(a) बनाक संकुचन सिद्धांत को लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and Prove Banach contraction principle.

(b) सिद्ध कीजिए किसी दूरीक समष्टि में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम एक कौशी अनुकम होना है। किन्तु विलोम सत्य नहीं है।

Prove that in a metric space every convergent sequence is Cauchy Sequence. But the Converse is not true.

इकाई /UNIT - V

5. **(a)** बेयर संवर्ग प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and Prove Baire Category Theorem.

(b) मानलो f : (x,d) -› (y,p) में दूरीक समष्टियों में एक फलन है तब सिद्ध कीजिए f संगत होगा यदि V का y में प्रत्येक f विवृत्त समुच्चय का प्रतिलोम प्रतिचित्रण $f^{1}(v)$, x का d विवृत्त उप समुच्चय होगा।

Let f : (x,d) -› (y,p) is a function on metric space. Then prove that f is Continuous if the inverse image V of $f^{1}(v)$is the d-open subset of X, Where V is F-Open set in Y.

अथवा/OR

(a) सिद्ध कीजिए प्रत्येक सुसम्बद्ध दूरीक समष्टि (x,d) पूर्ण होती है किन्तु विलोम सत्य नहीं है।

Prove that every Compact metric Space is complete but the converse is not True.

(b) सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक उप--समष्टि का संहत उप–समुच्चय संहत होता है।

Prove that the Campact Subset of a metric space is Compact.