AG-1210

B.A./B.Sc. (Part - III)
Term End Examination, 2018-19

MATHEMATICS

Paper - II

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं **दो** भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Solve any **two** parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (*a*) मान लो G एक समूह है, f, G का एक स्वकारिता है, N, G का एक प्रसामान्य उपसमूह है। सिद्ध कीजिए कि $f(N)$, G का एक प्रसामान्य उपसमूह है।

Let G be a group, f in an automorphism of G, N is normal subgroup of G. Prove that $f(N)$ is a normal subgroup of G.

http://www.onlinebu.com

(*b*) यदि G कोटि p^n का एक समूह है, जहाँ p एक अभाज्य संख्या है तथा n एक धन पूर्णांक है, तब सिद्ध कीजिए की G एक ः;ुच्छ केन्द्र रखता है। अर्थात $Z(G) \neq (e)$.

If G is a group of order p^n, where p is a prime number and n is a positive number, then prove that G has a non trivial centre. i.e. $Z(G) \neq (e)$.

(*c*) मानलो G एक परिमित समूह है और मानलो p एक अभाज्य है। यदि $p^n \mid o(G)$ किन्तु $p^{n+1} \nmid o(G)$, तब सिद्ध कीजिए की कोटि p^n के G के कोई दो उपसमूह संयुग्मी हैं।

Let G be a finite group and let p be a prime. If $p^n \mid o(G)$ but $p^{n+1} \nmid o(G)$, then prove that any two subgroups of G of order p^n are conjugate.

इकाई / Unit-II

2. (*a*) सिद्ध कीजिए कि एक क्रमविनिमेय वलय का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब एक क्रमविनिमेय वलय होता है।

Prove that every homomorphic image of a commutative ring is a commutative ring.

(*b*) दर्शाइए की यदि f वलय R से R' में समाकारिता है, तब f की अष्टि R की एक गुणजावली है।

Show that if f is a ring homomorphism from R to R', then the Kernel of f is an ideal of R.

(*c*) मानलो M एक R-माड्यूल है तथा मानलो A तथा B, M के दो उपमाड्यूल हैं तब दर्शाइए की $A + B$ भी M का एक उपमाड्यूल होता है।

Let M be an R-module and let A and B be two submodules of M. Then show that $A + B$ is also a submodule of M.

इकाई / Unit-III

3. (*a*) दो उपसमष्टियों का संघ एक उपसमष्टि होता है। यदि और केवल यदि एक दूसरे में अन्तर्विष्ट होता है। सिद्ध कीजिए।

The union of two subspaces is a subspace if and only if one is contained in the other. Prove it.

(*b*) यदि W_1 एवं W_2 एक परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ की दो उपसमष्टियाँ हैं, तब सिद्ध कीजिए कि :

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

If W_1 and W_2 be two subspaces of a finite dimensional vector space $V(F)$, then prove that :

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

(*c*) यदि समुच्चय $S = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ $V_3(R)$ का आधार है, तब दर्शाइये कि समुच्चय $S' = \{\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha\}$ भी $V_3(R)$ के लिये एक आधार समुच्चय है।

Show that if $S = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ is a basis of $V_3(R)$, then the set $S' = \{\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha\}$ is also a basis of $V_3(R)$.

इकाई / Unit-IV

4. (*a*) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक n विमीय सदिश समष्टि $V(F)$, $V_n(F)$ से तुल्यकारी होता है।

Prove that every n dimensional vector space $V(F)$ is isomorphic to $V_n(F)$.

(*b*) मानलो V_1 और V_2 क्षेत्र F पर सदिश समष्टियाँ हैं तथा रूपान्तरण $T : V_1 \to V_2$ एकैकी आच्छादक रैखिक रूपान्तरण हैं। तब सिद्ध कीजिये कि $T^{-1} : V_2 \to V_1$ भी एक रैखिक रूपान्तरण होगा।

Let V_1 and V_2 be two vector spaces over field F and $T : V_1 \to V_2$ is one-one and onto linear transformation. Then prove that $T^{-1} : V_2 \to V_1$ is also linear transformation.

(*c*) दर्शाइए कि निम्नलिखित आव्यूह A विकर्णीय है:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Show that the following matrix A is diagonalizable.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

इकाई / Unit-V

5. (*a*) सिद्ध कीजिए कि $V_2(R)$ एक आन्तर गुणन समष्टि है जबकि आन्तर गुणन निम्न रूप में परिभाषित है —

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 - a_2 b_1 - a_1 b_2 + 4\, a_2 b_2$$

जहाँ $\alpha = (a_1, a_2),\ \beta = (b_1, b_2)$

Prove that $V_2(R)$ is an inner product space with an inner product defined on —

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 - a_2 b_1 - a_1 b_2 + 4\, a_2 b_2$$

where $\alpha = (a_1, a_2),\ \beta = (b_1, b_2)$

(*b*) मानलो S एक आन्तर गुणन समष्टि V में सदिशों का समुच्चय है तब सिद्ध कीजिए की $S^{\perp}$, V की एक उपसमष्टि है।

Let S be any set of vectors in an inner product space V. Then prove that $S^{\perp}$ is a subspace of V.

(*c*) $\{1, x, x^2, x^3\}$ से शुरुवात करके $P_3\,[-1, 1]$ का एक प्रसामान्य लाम्बिक आधार ज्ञात कीजिए जबकि आन्तर गुणन की परिभाषा निम्न है :

$$(p, q) = \int_{-1}^{1} p(x) q(x)\, dx$$

जहाँ $p = p(x)$ तथा $q = q(x)$, $P_3[-1, 1]$ के स्वेच्छ बहुपद हैं।

Find the orthonomal basis of $P_3[-1, 1]$ starting from the basis $\{1, x, x^2, x^3\}$. Use the inner product defined by

$$(p, q) = \int_{-1}^{1} p(x) q(x) \, dx$$

Where $p = p(x)$ and $q = q(x)$ are arbitrary polynomials of $P_3[-1, 1]$.