Printed Pages – 8

AI-1108

B. A./B.S.c (Part-I)

Term End Examination, 2020-21

MATHEMATICS

Paper : Third

Time Allowed : Three hours

Maximum Marks : 50

नोट : *सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से दो प्रश्नों को हल करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।*

Note : Attempt all five questions. Two question from each unit is compulsory. All questions carry equal marks.

इकाई-I

Unit-I

1. (a) सिद्ध कीजिये कि—

$$[l\ m\ n][a\ b\ c] = \begin{vmatrix} l\cdot a & l\cdot b & l\cdot c \\ m\cdot a & m\cdot b & m\cdot c \\ n\cdot a & n\cdot b & n\cdot c \end{vmatrix}$$

Prove that :

$$[l\ m\ n][a\ b\ c] = \begin{vmatrix} l\cdot a & l\cdot b & l\cdot c \\ m\cdot a & m\cdot b & m\cdot c \\ n\cdot a & n\cdot b & n\cdot c \end{vmatrix}$$

(b) $\phi = x^2 - 2y^2 + 4z^2$ का बिन्दु $P(1, 1, -1)$ पर $2i + j - k$ की दिशा में दिक्-अवकलज ज्ञात कीजिए। दिक्-अवकलज का बिन्दु P पर अधिकतम मान भी ज्ञात कीजिए।

Find the directional derivative of $\phi = x^2 - 2y^2 + 4z^2$ in the direction of the vector $2i + j - k$ at the point $P(1, 1, -1)$. Also find the maximum value of directional derivative at P.

(c) सिद्ध कीजिए कि—

$$\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r).$$

Prove that :

$$\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r).$$

इकाई–II

Unit-II

2. (a) यदि $\vec{a}=t\hat{i}-3\hat{j}+2t\hat{k},\ \vec{b}=\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k},\ \vec{c}=3\hat{i}+t\hat{j}-\hat{k}$ तब सिद्ध कीजिए कि–

$$\int_1^2 \vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)dt=\frac{-87}{2}\hat{i}-\frac{44}{3}\hat{j}+\frac{15}{2}\hat{k}.$$

If $\vec{a}=t\hat{i}-3\hat{j}+2t\hat{k},\ \vec{b}=\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k},\ \vec{c}=3\hat{i}+t\hat{j}-\hat{k}$ then prove that :

$$\int_1^2 \vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)dt=\frac{-87}{2}\hat{i}-\frac{44}{3}\hat{j}+\frac{15}{2}\hat{k}.$$

(b) $\iint_s \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds$ का मान ज्ञात कीजिए, जबकि $\vec{F}=4xzi-y^2\hat{j}+yz\hat{k}$ एवं S समतलों $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$ से घिरे घन का पृष्ठ हैं।

Evaluate $\iint_s \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds$, where $\vec{F}=4xzi-y^2\hat{j}+yz\hat{k}$ and S is the surface of the cube

bounded by planes $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.

(c) फलन $\vec{F}=\left(x^2+y^2\right)\hat{i}-2xy\hat{j}$ के लिए स्टॉक के प्रमेय को सिद्ध कीजिए जबकि समाकल को $x=\pm a, y=0, y=b$ से उस आयत के परित: लिया जाए।

Verify stoke's theorem for $\vec{F}=\left(x^2+y^2\right)\hat{i}-2xy\hat{j}$ taken around the rectangle bounded by $x=\pm a, y=0, y=b$.

इकाई–III

Unit-III

3. (a) शांकव $17x^2-12xy+8y^2+46x-28y+17=0$ का अनुरेखण कीजिए।

Trace the conic $17x^2-12xy+8y^2+46x-28y+17=0$.

(b) सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के बिन्दु

से खींचे गये अतिपरवलय का समीकरण, जिसका उत्केन्द्र कोण 'α' है और जो दीर्घवृत्त से संनाभि है, $\frac{x^2}{\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{\sin^2\alpha}=a^2-b^2$ है।

Prove that the equation to the hyperbola drawn throgh point on the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, whose eccentric angle is 'α' and which is confocal with the ellipse is $\frac{x^2}{\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{\sin^2\alpha}=a^2-b^2$.

(c) उस शांकव का ध्रुवीय समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसकी नाभि ध्रुव है, उत्केन्द्रता e है एवं नाभिलंब जीवा $2l$ है।

Find the polar eq. of a conic whose focus is pole, eccentricity is e and latus-rectum is $2l$.

इकाई-IV

Unit-IV

4. (a) वृत्त $x^2+y^2+z^2=5$, $x+2y+3z=3$ से होकर जाने वाले और समतल $4x+3y-15=0$ को स्पर्श करने वाले गोलों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of sphers passing through the circle $x^2+y^2+z^2=5$, $x+2y+3z=3$ and touch the plane $4x+3y-15=0$.

(b) उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसका शीर्ष (5, 4, 3) एवं आधार $3x^2+2y^2=6$, $y+z=0$ है।

Find the equation of cone, whose vertex is (5, 4, 3) and base curve is $3x^2+2y^2=6$, $y+z=0$.

(c) उस लंबवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 2 तथा अक्ष रेखा $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{2}$ है।

Find the equation of right circular cylinder whose radius is 2 and axis is the line $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$.

इकाई-V

Unit-V

5. (a) प्रतिबंध ज्ञात करो जबकि समतल $lx+my+nz=p$ परवलयज $ax^2+by^2=2cz$ को स्पर्श करता है।

To find the condition that the plane $lx+my+nz=p$ may touch the parabolid $ax^2+by^2=2cz$.

(b) अतिपरवलयज $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$, के बिन्दु (1, 2, –3) से होकर ज़ाने वाले जनकों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of generating lines of the

hyperboloid $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$, which pass through the point (1, 2, –3)

समीकरण का $2x^2-7y^2+2z^2-10yz-8zx-10xy+6x+12y-6z+5=0$ समानयन प्रामाणिक रूप का समानयन प्रामाणिक रूप में कीजिए तथा शांकवज की प्रकृति बताइए।

Reduce the equation $2x^2-7y^2+2z^2-10yz-8zx-10xy+6x+12y-6z+5=0$ to the standard form and state the nature of the conicoid.